

# Theoretische Betrachtungen des Einsatzes eines Rettungssystems für Gleitschirme

Andreas Pöschl, Martin Schwingenheuer

6. Mai 2010



# Kapitel 1

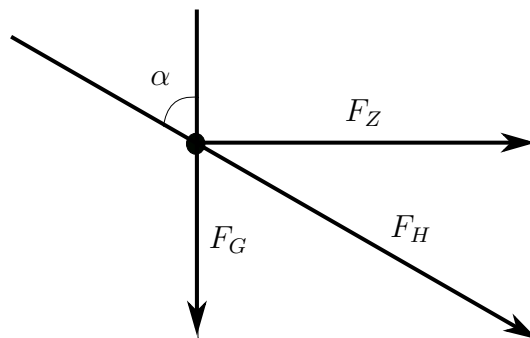
## Theoretische Betrachtungen

### 1.1 Der Zusammenhang zwischen Schräglage $\alpha$ und der Winkelgeschwindigkeit $\omega$

Im Folgenden soll untersucht werden, wie die Schräglage  $\alpha$  des Systems Pilot/Schirm gegen die Vertikale mit deren Winkelgeschwindigkeit zusammenhängt. Hierzu nehmen wir an, dass der Gleitschirm immer genau die passende Haltekraft aufbringt. Die Haltekraft ergibt sich aus dem Auftrieb des Schirms und wir nehmen im folgenden an, dass die Auftriebskraft proportional zum Quadrat der Schirmgeschwindigkeit  $v$  ist:

$$F_H = kv^2.$$

Die folgende Abbildung zeigt die angreifenden Kräfte bei gegebener Schräglage  $\alpha$ :



Im Geradeausflug gilt  $F_H = F_G = kv_0^2$  wobei  $F_G$  die Gewichtskraft des Piloten und  $v_0$  die Geschwindigkeit des Schirms ist, die notwendig ist um den Piloten im Geradeausflug zu halten. Für eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und einer Schräglage  $\alpha$  hängen  $F_H$  und  $F_G$  über den Winkel  $\alpha$  zusammen:

$$F_H = \frac{1}{\cos(\alpha)} F_G \quad (1.1)$$

Die Haltekraft des Schirms steigt, je größer  $\alpha$  wird. Wir können folglich über die notwendige Auftriebskraft die Schirmgeschwindigkeit  $v$  berechnen:

$$v(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\cos(\alpha)}} v_0 \quad (1.2)$$

Im Folgenden wird  $v_0$  als  $10 \frac{m}{s}$  angenommen. Wir betrachten eine Rotation des Systems Pilot/Schirm um eine vertikale Achse, so dass das Drehzentrum zwischen Schirm und Pilot liegt. Weiter setzen wir eine fest vorgegebene Sinkgeschwindigkeit  $v_s = 5 \frac{m}{s}$  des Systems Pilot/Schirm fest. Damit berechnet sich die Schirmgeschwindigkeit zu

$$v(\alpha) = \sqrt{v_{DS}^2 + v_s^2},$$

wobei  $v_{DS} = \omega r_s$  die horizontale Bahngeschwindigkeit des Schirms aufgrund der Drehung ist.

Es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen  $r_p$ , dem Rotationsradius des Piloten und  $r_s$ , dem Rotationsradius des Schirms:

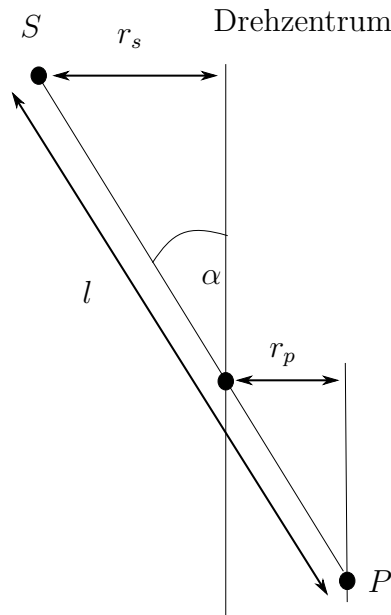


Abbildung 1.1: Die Radien von Schirm ( $r_s$ ) und Pilot ( $r_p$ ) hängen über die Leinenlänge  $l$  und  $\alpha$  zusammen.

$$r_p + r_s = \sin(\alpha)l \quad (1.3)$$

Für den Zusammenhang zwischen  $F_G$  und  $F_Z$  gilt (siehe 1.1):

$$F_Z = \tan(\alpha)F_G \quad (1.4)$$

und wegen  $F_Z = m\omega^2 r$  damit

$$\omega^2 r_p = \tan(\alpha)g.$$

### 1.1. DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN SCHRÄGLAGE $\alpha$ UND DER WINKELGESCHWINDIGKEIT

Wir ersetzen jetzt  $r_p = l \sin(\alpha) - r_s$  und erhalten

$$\omega^2(l \sin(\alpha) - r_s) = \omega^2 l \sin(\alpha) - \omega(\omega r_s) = \omega^2 l \sin(\alpha) - v_{DS} \omega = \omega^2 l \sin(\alpha) - \sqrt{\frac{v_0^2}{\cos(\alpha)}} - v_s^2 \omega = \tan(\alpha) g.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für  $\omega$ . Wir verwenden folgende Werte aus der Praxis:

$$l = 6.5m$$

$$v_s = 5 \frac{m}{s}$$

$$v_0 = 10 \frac{m}{s}$$

$$g = 10.$$

Einige einfache Umformungen führen auf folgende Lösungen für die oben angegebenen Werte:

$$\omega_{\pm}(\alpha) = \frac{1}{13} \left( \frac{5\sqrt{4 - \cos(\alpha)} \pm \sqrt{360 - 25 \cos(\alpha) - 260 \cos^2(\alpha)}}{\sqrt{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}} \right).$$

Die zugehörigen Radien  $r_p$  ergeben sich nun leicht aus dem Zusammenhang:

$$r_p = \frac{\tan(\alpha) g}{\omega^2(\alpha)}.$$

Im folgenden präsentieren wir Graphen der Frequenzen  $f_+ = \frac{\omega_+}{2\pi}$ ,  $f_- = \frac{\omega_-}{2\pi}$  sowie der zugehörigen Radien  $r_p^+(\alpha)$ ,  $r_p^-(\alpha)$  des Piloten. Anschliessend diskutieren wir deren Bedeutung.

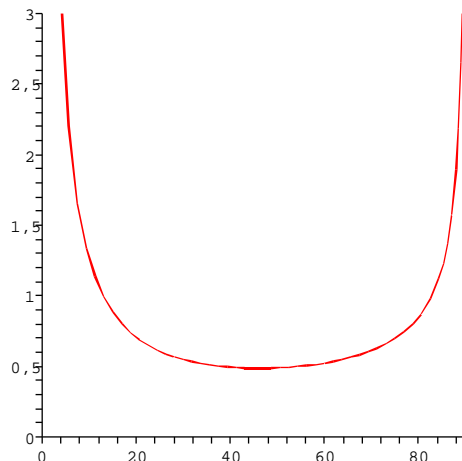
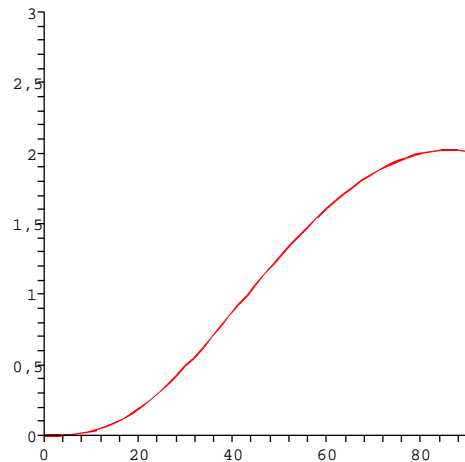
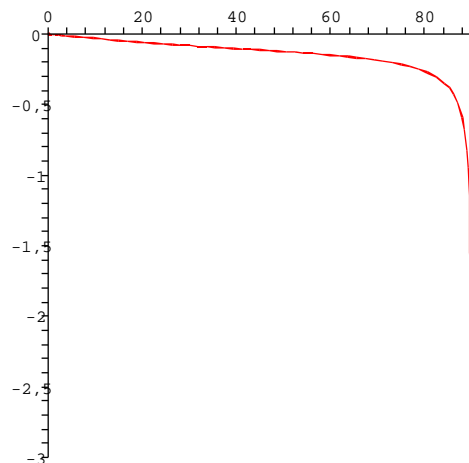
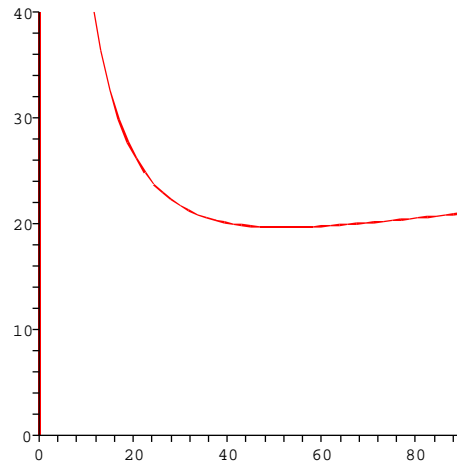


Abbildung 1.2: Die Frequenz  $f_+$  in Abh. von  $\alpha$

Abbildung 1.3: Der Radius  $r_+$  in Abh. von  $\alpha$ Abbildung 1.4: Die Frequenz  $f_-$  in Abh. von  $\alpha$ 

Aus den Diagrammen für die Radien können wir entnehmen, dass es für gegebene Schräglage  $\alpha$  zwei spiralenförmige Flugbahnen gibt. Eine mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega_+(\alpha)$ , bei der das Drehzentrum zwischen Schirm und Pilot liegt ( $r_p < l \sin(\alpha)$ ) und eine weitere mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega_-(\alpha)$  bei der das Drehzentrum ausserhalb des Schirms liegt ( $r_p > 19$  m).

Bemerkenswert hier ist, dass der Grenzfall, bei der das Drehzentrum im Schirm selbst liegt nicht möglich ist. Es folgt deshalb, dass der Pilot in eine innere Bahn nur durch einen Fehler (Stömungsabriss) gelangen kann und nicht durch stetige Flugmanöver. Auch folgt nun, dass er, einmal in einer solchen inneren Spirale gefangen, nur mit Mühe und

Abbildung 1.5: Der Radius  $r_-$  in Abh. von  $\alpha$ 

einem weiteren un stetigen Flugmanöver der inneren Bahn entkommen kann. Bei den auftretenden Fliehkräfte ist dies vielleicht auch unmöglich. Er ist also gezwungen, diesen Flugzustand durch Wurf seines Rettungssystems zu beenden.

Wir wenden uns jetzt dem Wurf des Rettungssystems zu.

## 1.2 Transformation in das beschleunigte Bezugssystem

Um die Bahn des Retters in Relation zum System Pilot/Schirm aus Sicht des Piloten bestimmen zu können wird zunächst eine Transformation in das beschleunigte System des Piloten durchgeführt.

Anschließend wird die Bewegungsgleichung des Retters gelöst, und damit die Bahnkurve des Retters im System des Piloten berechnet.

## 1.3 Bahnkurve des Retters im beschleunigten System

Der Pilot erfährt im beschleunigten System nach [Go] eine Kraft  $F_B$ :

$$F_B = F - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1.5)$$

Dabei ist der erste Term die Kraft im Inertialsystemm, der zweite Term die Coriolis- und der dritte die Zentrifugalkraft.  $v$  ist die Geschwindigkeit der Masse  $m$  im beschleunigten

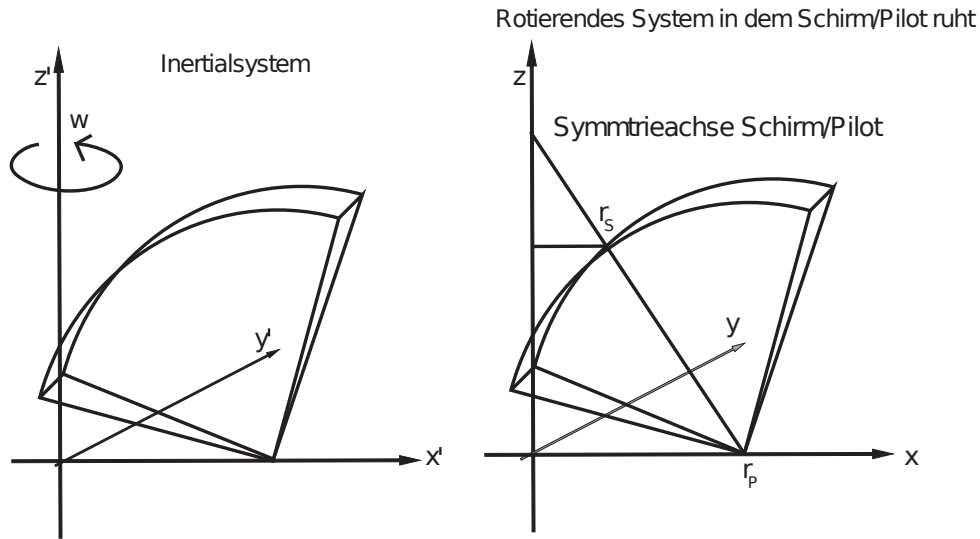


Abbildung 1.6: Es wird eine Transformation vom Inertialsystem in das rotierende Systems des Piloten durchgeführt.

System und  $\vec{r}$  beschreibt die Bahn im beschleunigten System. Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \quad (1.6)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y \quad (1.7)$$

$$\ddot{z} = g \quad (1.8)$$

Durch Einführen komplexer Zahlen  $c = x + iy$  lassen sie sich schreiben als

$$\ddot{c} = -2i\omega\dot{c} + \omega^2 c$$

$$\ddot{z} = g.$$

Die Lösung der komplexen Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen  $c(0) = c_0$  und  $\dot{c}(0) = v$  ist:

$$c(t) = ((v + i\omega c_0)t + c_0) \exp^{-i\omega t} \quad (1.9)$$

$v$  ist die Startgeschwindigkeit des Retters, das heißt die Geschwindigkeit mit der der Pilot den Retter in Richtung der  $x$ - $y$  Ebene wegwirft und  $c_0$  der Startpunkt. Die  $z$ -Richtung erweist sich in den Bewegungsgleichungen als unabhängig von  $x$  und  $y$  und kann somit später getrennt von der radialen Bewegung betrachtet werden.  $c(t)$  beschreibt eine Schraube mit wachsendem Radius.

Abb. 1.7 zeigt schematisch die Bahnen zum einen für eine Wurfrichtung radial nach außen (das bedeutet vom Piloten aus gesehen, schräg nach unten!!) und einmal mit vertikaler Komponente (also vom Piloten aus gesehen zur Seite) für gleiche Wurfgeschwindigkeiten. Durch geeignete Wahl der Koordinaten dürfen wir annehmen, dass  $c_0 = x_0$  (mit  $x_0 = r_p^+(\alpha)$ ) auf der reellen Achse liegt und der Gleitschirm in der  $xz$ -Ebene liegt. Diese Annahme trifft nicht gänzlich zu, da der Schirm auch eine Ausdehnung in  $y$ -Richtung besitzt



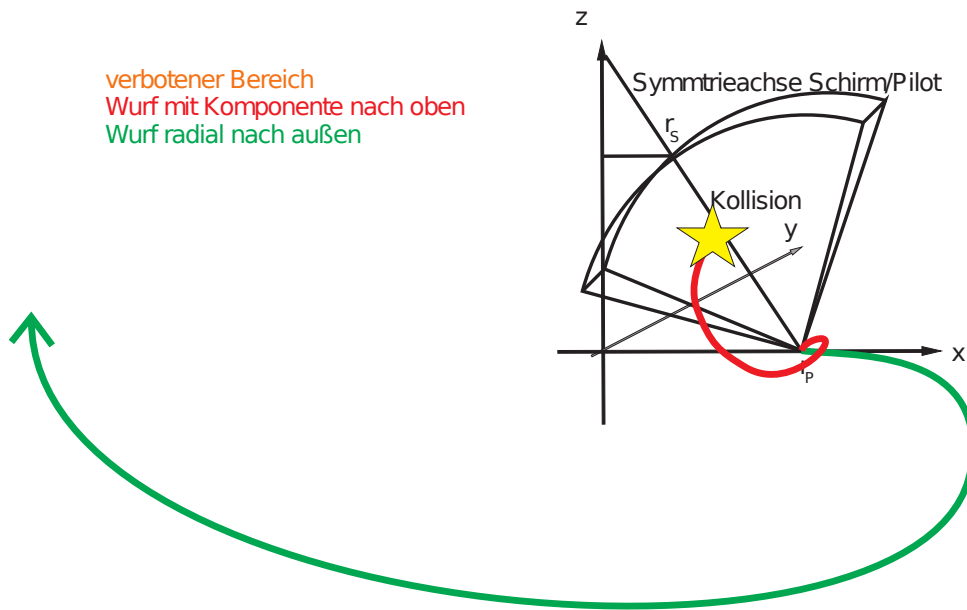


Abbildung 1.7: Schematische Darstellung der Bahn des Retters, für den Fall, dass der Pilot einmal radial nach außen wirft und einmal mit einer Komponente in positiver  $z$ -Richtung.

(ca.  $2m$  an der breitesten Stelle). Auch gibt es wegen des Sinkens einen Kipp-Effekt des Schirms: Man beachte hier aber, dass das System Schirm-Pilot gegen den Uhrzeigersinn

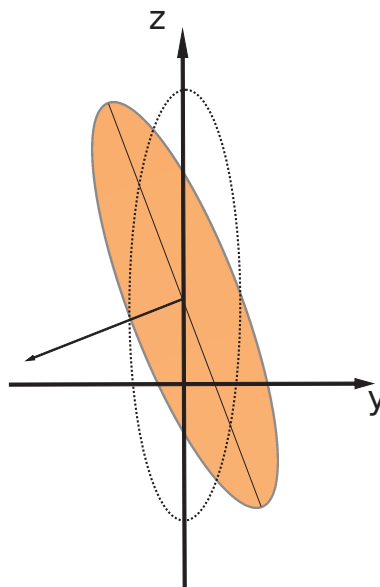


Abbildung 1.8: Kippen in  $y$ -Richtung

dreht. Wegen des Sinkens kippt somit das untere Ende des Schirms in positive  $y$ -Richtung und das obere Ende in negative  $y$ -Richtung. Da uns der zweite Effekt weitere Zeit gibt

und es sich im ersten um einen Winkel von ca.  $8^\circ$  handelt, dürfen wir die beiden Effekte vernachlässigen.

Man beachte, dass das System Pilot/Gleitschirm fest im drehenden Koordinatensystem liegt und der Retter sich auf einer Bahn mit  $xy$ -Komponente

$$c(t) = ((v + i\omega c_0)t + c_0) \exp^{-i\omega t}$$

bewegt. Für

$$\omega T_{krit} = \pi$$

passiert er zum ersten Mal die  $xz$ -Ebene, in welcher der Gleitschirm liegt. Das heisst, dass die erste potenzielle Kollision zur Zeit

$$T_{krit} = \frac{\pi}{\omega}$$

stattfindet.

Im folgenden nehmen wir an, dass die Leinenlänge des Retters 6 m beträgt und dass die Öffnung des Rettungsschirms beginnt, sobald die Distanz Pilot-Retter 6 m beträgt. Die Strategie, verschiedene Würfe zu vergleichen ist wie folgt: Für einen gegebenen Wurf berechnen wir die Zeit  $T_6$  nach der die Distanz Pilot-Retter 6 m beträgt. Die Differenz

$$T_{krit} - T_6$$

gibt somit die Zeit wieder, die dem Rettungsschirm zum Öffnen bleibt, bevor sich eine Kollision zwischen Retter und Schirm ereignen kann. Als wesentlich stellt sich der Einfluss der Schwerkraft auf den Retter heraus. Wir gehen deshalb von der Bahnkurve

$$\tilde{c}(t) = (((v_{xy} + i\omega x_0)t + x_0)e^{-i\omega t}, v_z t - \frac{1}{2}gt^2)$$

des Retters in 3-Dimensionen aus. Hier ist  $v_z$  die vertikale Komponente von  $v$  und  $v_{xy}$  die horizontale Komponente als komplexe Zahl geschrieben.

Wir werden im folgenden immer annehmen, dass der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit  $7\frac{m}{s}$  beträgt. Der zweite Autor hat im horizontalen Wurf mit einem 2.7 kg schweren Stück Holz ohne weiteres horizontale Geschwindigkeiten von mehr als  $10\frac{m}{s}$  zustande gebracht (allerdings am Boden).

# Kapitel 2

## Diskussion verschiedener Würfe

Die folgende Skizze zeigt die Wurfrichtungen der diskutierten Würfe in der  $xz$ -Ebene.

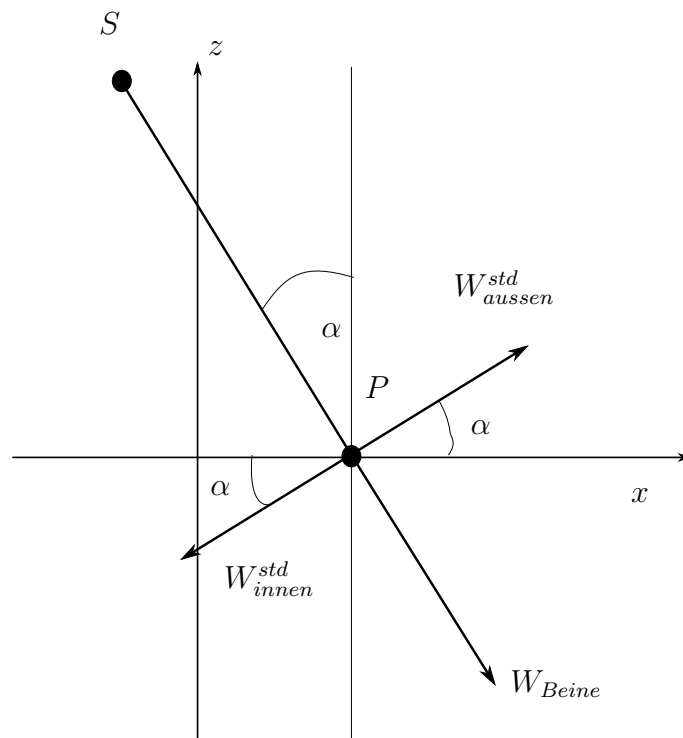


Abbildung 2.1: Die Würfe  $W_{std\ innen}$ ,  $W_{std\ aussen}$ ,  $W_{Beine}$

### 2.1 Der Standardwurf

Unter dem Standardwurf verstehen wir den Wurf des Pilot, von ihm aus gesehen waagrecht nach rechts. Es ergibt sich eine Asymmetrie des Erfolgs dieses Wurfes, je nachdem ob eine Links- oder eine Rechtsspirale geflogen wird. Statt die Drehrichtung der Spirale

umzukehren, betrachten wir einmal den Standardwurf  $W_{innen}^{std}$ , vom Piloten aus waagrecht nach rechts (in Richtung Drehzentrum) und den Standardwurf  $W_{aussen}^{std}$  vom Piloten aus waagrecht nach links (weg vom Drehzentrum). Die Graphik 2.2 verdeutlicht die Asymmetrie der beiden Graphen von  $T_{krit} - T_6$  für die beiden Standardwürfe.

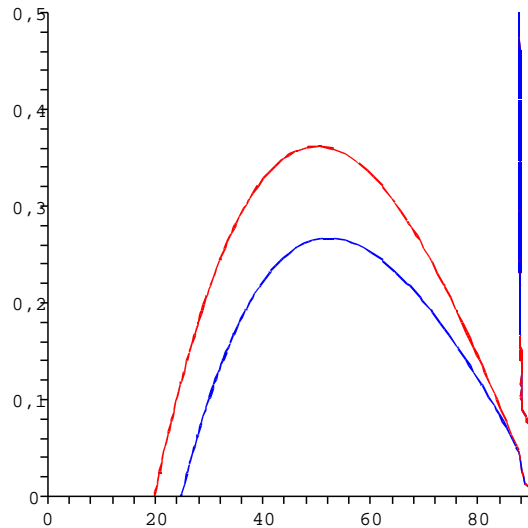


Abbildung 2.2: Die Graphen von  $T_{krit} - T_6$  für  $W_{innen}^{std}$  (oberer Graph) und  $W_{aussen}^{std}$  (unterer Graph)

In unserem Modell ist die Zeit ausschlaggebend, die benötigt wird um die volle Leinenlänge des Retters zu erreichen. Es ist somit vorteilhaft, nach aussen und nach unten zu werfen. Für  $W_{aussen}^{std}$  wird zwar nach aussen geworfen, jedoch auch nach oben (waagrecht nach aussen aus der Sicht des in Schräglage fliegenden Piloten hat eine positive vertikale Komponente in unserem Koordinatensystem). Im Falle von  $W_{innen}^{std}$  wird zwar nach unten geworfen, jedoch auch nach innen. Der Einfluss der Gravitation überwiegt, deshalb erscheint eine Asymmetrie zwischen den beiden Würfen.

## 2.2 Der Wurf zwischen den Beinen hindurch

Besser stellt sich dieser, im folgenden  $W_{Bein}$  genannte Wurf dar. Hier wird sowohl nach aussen als auch nach unten geworfen. Deutlich zeigt sich in der Vergleichsgraphik der Vorteil dieses Wurfes. Im Vergleich zu  $W_{aussen}^{std}$  gewinnt der Retter fast doppelt soviel Zeit sich zu entfalten. Auch im Vergleich zu  $W_{innen}^{std}$  zeigt sich ein eindeutiger Vorteil.

Von Vorteil in der Praxis ist auch die Unabhängigkeit von der Drehrichtung. Graphik 2.4 zeigt den Vergleich zu den beiden Standardwürfen. Der oberste Graph ist der von  $T_{krit} - T_6$  für den Beinwurf  $W_{Beine}$ , der mittlere ist der für  $W_{innen}^{std}$  und der unterste ist der Graph für  $W_{aussen}^{std}$ .

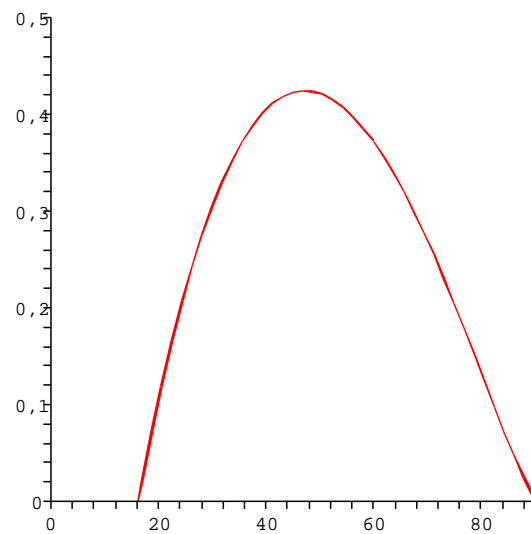
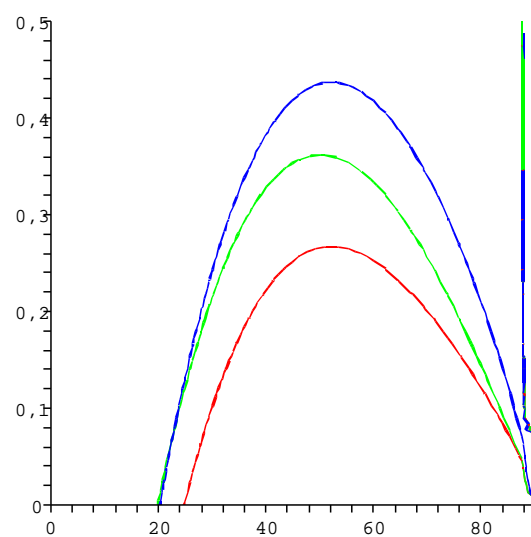
Abbildung 2.3: Der Graph von  $T_{krit} - T_6$  für  $W_{Beine}$ 

Abbildung 2.4: Alle drei Graphen zum Vergleich

Der Graph 2.5 stellt den Rotationswinkel für alle drei Würfe dar, nachdem die volle Leinenlänge des Retters erreicht ist. In dieser Graphik ist der unterste Graph der von  $W_{Beine}$ , der mittlere von  $W_{innen}^{std}$  und der oberste der von  $W_{ausseu}^{std}$ .

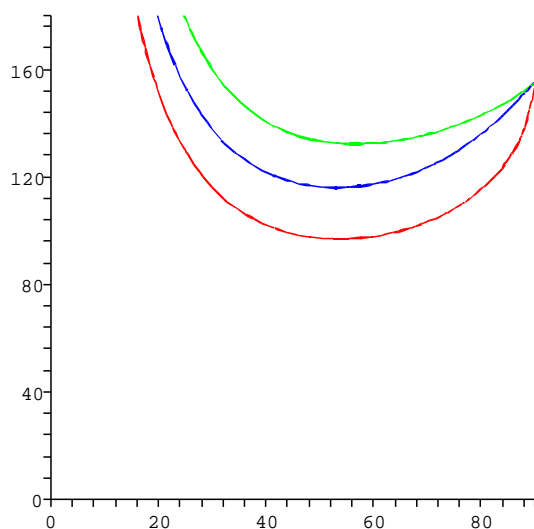


Abbildung 2.5: Der Winkel nach dem die volle Leinenlänge erreicht ist, für alle drei Würfe.

## 2.3 Fazit

Unser Modell zeigt einen deutlichen Vorteil des Beinwurfes im Vergleich zu dem heute praktizierten Standardwurf. Da die Bewegungsgleichungen integriert sind, sollte man theoretisch in der Lage sein einen Idealwurf anzugeben. Aufgrund der Komplexität der Gleichungen ist dies aber rechnerisch nur schwer möglich. Auch würde sich vermutlich eine Abhängigkeit des Idealwurfes von den Anfangsbedingungen ergeben, die in der Praxis nicht erwünscht ist.

Es bleibt zu diskutieren, inwieweit die Annahmen in unserem Modell zutreffen.